

AFTERMATH

LØSNINGER

Spionen

Opgaven at reducere en vis hær på 20 soldater til en spion, der er 4 skridt ude i ingenmandsland, løses således:

		○				
		19				
8		9				
		7,18		11,17		14
3	2	1,12		10	15	
5		6	16			
		4		13		

Spørgsmålet var, om dette er det bedste, vi kan opnå. Er det muligt at nå fem skridt ud fra fronten?

Svaret er nej.

For at overbevise os om denne umulighed, vil vi indføre et potentiale af en hær. Vi giver hvert felt en værdi på en sådan måde, at når tre felter står på række, lodret eller vandret, så skal værdien i hver ende være højst summen af de to andre værdier. Det kunne være tilfældet, hvis vi gav hvert felt værdien 1. Potentialet af en hær skal så være summen af værdierne fra de felter, som pindene står på.

Fidusen er, at hvis vi foretager et træk, så kan potentialet af hæren ikke øges.

Nu vil vi give alle felter i hele verden en værdi på snedig måde. Vi giver det felt, som vi vil ende i, værdien 1, og de øvrige felter så små værdier som muligt. Dertil skal vi bruge et tal, $0 < \varphi < 1$, som opfylder

ligningen $\varphi^2 + \varphi = 1$, altså

$$\varphi = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

Derefter giver vi naboerne til 1 værdien φ , deres naboer, der ikke allerede har en værdi, værdien φ^2 , osv. højere og højere potenser, jo længere vi kommer væk. Og finder vi tre på striben, så har de typisk værdierne φ^n , φ^{n+1} og φ^{n+2} . Her er den første værdi netop summen af de to andre, mens den sidste er mindre end summen af de to andre.

		1				
		φ				
		φ^2				
		φ^3				
		φ^4				
		φ^5	φ^6	φ^7		
		φ^6				

Nu kan vi jo forsøge at vurdere potentialet af en hær, der står i afstanden 5 fra målet. Det nærmeste felt har værdien φ^5 , og herfra aftager værdierne succesivt med en faktor φ .

Nu er jo

$$\sum_{k=n}^{\infty} \varphi^k = \frac{\varphi^n}{1 - \varphi} = \varphi^{n-2}$$

Så de lodrette summer bliver φ^n for $n = 3, 4, 4, 5, 5, \dots$, hvis sum er

$$\sum_{k=3}^{\infty} \varphi^k + \sum_{k=4}^{\infty} \varphi^k = \varphi + \varphi^2 = 1$$

Konklusionen er, at en hvilken som helst hær af pinde bag fronten har et potentiale, der er mindre end 1. Da potentialet ikke kan vokse, er det umuligt at nå frem til den ønskede slutposition, hvor den ene pind jo har potentialet 1.

P.S. Den viste hær på 20 pinde har netop potentialet 1 og er minimal for at løse opgaven at nå 4 skridt ud fra fronten. Selv om mange hære på 19 har potentialet 1, er der ikke noget simpelt argument for, at de to af dem ikke dur, mens resten kan udelukkes ved et generaliseret paritetsargument. De to vanskelige er:

			○			
●	●	●	●	●	●	●
●	●	●	●	●	●	
	●	●	●	●	●	
			●			

			○			
●	●	●	●	●	●	●
	●	●	●	●	●	
	●	●	●	●	●	
			●			
			●			

Arealet af en \diamond

Bestem arealet af en \diamond , givet ved formlen:

$$|x|^{\frac{2}{3}} + |y|^{\frac{2}{3}} \leq 1$$

Arealet er $\frac{3\pi}{8}$.

Opgaven er foreslået af Else Høyrup. Den generaliseres umiddelbart til

$$\diamond_p = \left\{ (x, y) \mid |x|^{\frac{2}{p}} + |y|^{\frac{2}{p}} \leq 1 \right\}$$

Arealet er

$$\begin{aligned} A(\diamond_p) &= \int_{\diamond_p} dx \wedge dy = \int_{\partial \diamond_p} x dy = \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p t \sin^p t dt = 4p \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p+1} t \sin^{p-1} t dt = \\ &= 4p \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t (\cos t \sin t)^{p-1} dt = \\ &= 4p \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2t + 1}{2} \left(\frac{\sin 2t}{2} \right)^{p-1} dt = \\ &= \frac{4p}{2^p} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-1} 2t \cos 2t dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-1} 2t dt \right) \\ &= 0 + \frac{4p}{2^p} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-1} t dt \end{aligned}$$

Man ved jo, eller regner let ud, eller finder i B. O. Peirce, *A Short Table of Integrals*, formel 498, at for $n \in \mathbb{N}$ er

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x dx &= \frac{2^{2n-2}}{n \binom{2n-1}{n}} \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx &= \binom{2n}{n} \frac{\pi}{2^{2n+1}} \end{aligned}$$

Indsættes disse udtryk fås de to formler:

$$\begin{aligned} A(\diamond_{2n-1}) &= \binom{2n-1}{n} \frac{n\pi}{2^{4n-4}} \\ A(\diamond_{2n}) &= \frac{2}{\binom{2n-1}{n}} \end{aligned}$$

Kompleks algebra

Lad $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ være komplekse tal, så at $\sum_{i=1}^n \alpha_i^m$ er et helt tal for enhver positiv hel eksponent, m .

Vis, at polynomiet $\prod_{i=1}^n (x - \alpha_i)$ har hele koefficienter.

Opgaven er stillet i American Mathematical Monthly, 90, (1983), E2993, p. 287 af Michael Larsen, student ved Harvard University.

En løsning af A. A. Jagers, Technische Hogeschool Twente, Holland, blev bragt i AMM, 93, (1986), p. 483.

Lad a_i være koefficienten til x^{n-i} i polynomiet. Så er

$$g(x) = \prod_{i=1}^n (1 - \alpha_i x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

hvor $a_0 = 1$. Lad $h(x)$ være den frembringende funktion for potenssummerne $s_k = \sum_{i=1}^n \alpha_i^k$, $h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} s_k x^{k-1}$. Så vil

$$h(x) = -\frac{d \log g(x)}{dx}$$

med andre ord,

$$g'(x) + h(x)g(x) = 0$$

Heraf fås ved sammenligning af koefficienterne for $1 \leq m \leq n$:

$$m a_m + s_1 a_{m-1} + s_2 a_{m-2} + \dots + s_m a_0 = 0$$

Da $s_k \in \mathbb{Z}$, følger ved induktion efter m , at $m! a_m \in \mathbb{Z}$ for alle m . Så er også $n! a_m \in \mathbb{Z}$, hvorfor $n! \alpha_i$ er et algebraisk heltal for alle i . Men da $s_k \in \mathbb{Z}$ for alle k , kan argumentet gentages for α_i^k i stedet for α_i . Men så er $n! \alpha_i^k$ et algebraisk heltal for alle k . Derfor er α_i selv et algebraisk heltal. Endelig er koefficienterne a_m heltalspolynomier i α_i og derfor algebraisk heltal. Da de åbenbart er rationale, må de være hele.

NYE OPGAVER

Fra nøddeknækkeriet

To små egn sad med hver sit lager af nødder. Den ene sad med et lager på 200 hasselnødder, mens den anden havde samlet sig et blandet lager af 99 valnødder og 100 hasselnødder.

Nu tog det andet egn hver dag to nødder fra sit lager, en i hver forpote. Hvis de to nødder viste sig at være af samme slags, så spiste den ene nød og gav den anden til sin kammerat, der spiste den og til gengæld betalte med en hasselnød, som det andet egn kastede ned i sin bunke. Hvis derimod de to nødder viste sig at være af hver sin slags, så spiste det andet egn hasselnødden og lagde valnødden tilbage i bunken. Imens spiste det første egn så en af sine egne hasselnødder.

Hver dag blev hver af bunkerne én nød mindre, så efter 198 dage havde det andet egn kun én nød tilbage.

Var det en hasselnød eller en valnød?

Et trekantet problem

Der er givet tre parallelle linier. Man skal så i al enkelhed konstruere en ligesidet trekant, der har et hjørne på hver af de tre parallelle linier.

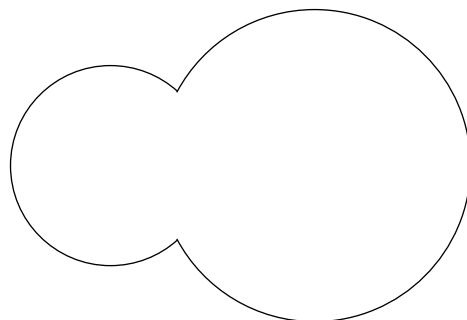
Origami

I anledning af julen har familien fået servietter på bordet. De ligger på tallerknerne som retvinklede, ligebenede trekanter. Mens familien venter på gåsen, foreslår lille Peter, at de prøver at klippe servietterne i stykker, der hver har form som en retvinklet, ligebenet trekant, men så der er mindst to, og så ikke to af stykkerne er lige store.

Efter en halv times forløb kommer gåsen, og familien må gribe til en køkkenrulle til erstatning for de fine servietter, der ikke længere kan bruges til noget.

Man skal dele en retvinklet, ligebenet trekant i så få forskellige, retvinklede, ligebenede trekanter som muligt, men mindst to.

Opvarmning til søs



På et koralrev i nærheden af Påskeøen holdt høvdingen meget af at stå på vandski. Men det var kun muligt i det stille vand inden for revet. Desuden ville han altid stå så tæt forbi sin hytte som muligt, for at hans koner og børn kunne vinke til ham imens.

Koralrevet havde form som to cirkelbuer, der er på vej til at gribe ind over hinanden. Høvdingens hytte lå lige netop der, hvor den ene cirkelbue går over i den anden.

Nu er problemet, at han vil have sin vandskibane i en ret linie forbi hytten. Hvordan skal han vælge sin bane, så den i ret linie bliver så lang som muligt?