

## AFTERMATH

## LØSNINGER

Alle opgaver er løst af Bent Fuglede.

### Potenssummen

Denne opgave er foreslået af Else Høyrup.

Lad

$$S = \sin^4 2^\circ + \sin^4 7^\circ + \sin^4 12^\circ + \cdots + \sin^4 87^\circ$$

og

$$T = \sin^4 3^\circ + \sin^4 8^\circ + \sin^4 13^\circ + \cdots + \sin^4 88^\circ$$

Bestem værdien af  $S + T$ .

### Løsning

13,5.

Summen deles i de 9 summer af formen for  $n = 0, 1, \dots, 8$ :

$$\begin{aligned} & \sin^4(2 + 5n)^\circ + \sin^4(88 - 5n)^\circ \\ & + \sin^4(47 + 5n)^\circ + \sin^4(43 - 5n)^\circ \end{aligned}$$

Hver af dem udregnes ved kvadrering af Py-

thagoras:

$$\begin{aligned} & \sin^4(2 + 5n)^\circ + \cos^4(2 + 5n)^\circ \\ & + \cos^4(43 - 5n)^\circ + \sin^4(43 - 5n)^\circ \\ & = 1 - 2\sin^2(2 + 5n)^\circ \cos^2(2 + 5n)^\circ \\ & + 1 - 2\sin^2(43 - 5n)^\circ \cos^2(43 - 5n)^\circ \\ & = 2 - \frac{1}{2}(\sin^2(4 + 10n)^\circ + \sin^2(86 - 10n)^\circ) \\ & = 2 - \frac{1}{2}(\sin^2(4 + 10n)^\circ + \cos^2(4 + 10n)^\circ) \\ & = 2 - \frac{1}{2} = 1,5 \end{aligned}$$

De øvrige opgaver er fra samlingen Kenneth S. Williams and Kenneth Hardy, *The Red Book of Mathematical Problems*, Dover Publications, Inc., Mineola (1997).

### En sum af brøker

Bestem summen

$$S = \sum_{\substack{m,n=1 \\ (m,n)=1}}^{\infty} \frac{1}{mn(m+n)}$$

### Løsning

$$S = 2.$$

$$\begin{aligned}
T &= \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{mn(m+n)} \\
&= \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{mn} \int_0^1 x^{m+n-1} dx \\
&= \int_0^1 \left( \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m} \right) \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \right) \frac{dx}{x} \\
&= \int_0^1 \frac{\ln^2(1-x)}{x} dx \\
&= \int_0^{\infty} \frac{u^2 e^{-u}}{1-e^{-u}} du \\
&= \int_0^{\infty} u^2 \sum_n = 1^{\infty} e^{-nu} du \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} u^2 e^{-nu} du \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{d^3} \right) \sum_{\substack{q,r=1 \\ (q,r)=1}}^{\infty} \frac{1}{qr(q+r)} \\
&= S \left( \sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{d^3} \right)
\end{aligned}$$

Men så er jo  $S = 2$ .

### Tælling

Vis, at for ethvert naturligt tal,  $n$ , findes en cirkel, som indeholder netop  $n$  punkter i planen med heltallige koordinater.

### Løsning

Betragt to heltalspunkter,  $(n, m)$  og  $(s, t)$ . Antag, at de har samme afstand til punktet  $(\sqrt{2}, \frac{1}{3})$ . Altså, at

$$(n - \sqrt{2})^2 + (m - \frac{1}{3})^2 = (s - \sqrt{2})^2 + (t - \frac{1}{3})^2$$

Så er

$$2(n - s)\sqrt{2} = n^2 + m^2 - s^2 - t^2 + \frac{2}{3}(t - m)$$

Men så er  $n = s$ , så vi får

$$(m - t)(m + t - \frac{2}{3}) = 0$$

Eneste heltalsløsning er  $m = t$ .

En voksende cirkel med centrum i  $(\sqrt{2}, \frac{1}{3})$  inddrager heltalspunkterne et efter et.

På den anden side har vi jo også

$$\begin{aligned}
T &= \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{mn(m+n)} \\
&= \sum_{d=1}^{\infty} \sum_{\substack{m,n=1 \\ (m,n)=d}}^{\infty} \frac{1}{mn(m+n)} \\
&= \sum_{d=1}^{\infty} \sum_{\substack{q,r=1 \\ (q,r)=1}}^{\infty} \frac{1}{d^3 qr(q+r)}
\end{aligned}$$

### Utilstrækkelige tal

Vis, at der er uendelig mange naturlige tal, der ikke kan skrives som sum af et helt kvadrattal og et primtal.

### Løsning

Lad  $m \in \mathbb{N}$  og betragt  $(3m + 2)^2$ . Af

$$(3m + 2)^2 = n^2 + p$$

fås

$$p = (3m + 2 - n)(3m + 2 + n)$$

altså ligningerne

$$3m + 2 - n = 1$$

$$3m + 2 + n = p$$

der har løsningerne

$$m = \frac{p-3}{6}$$

$$n = \frac{p-1}{2}$$

så at

$$p = 3(2m + 1)$$

hvoraf  $m = 0$  og  $p = 3$ . Alle andre tal af formen  $(3m + 2)^2$  kan derfor ikke skrives som forlangt.

### En ulighed

Lad  $m > 1$  og  $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$  og

$$A_n = a_1 + \dots + a_n, \quad n = 1, 2, \dots, m.$$

Vis, at

$$\sum_{n=2}^m \left(\frac{A_n}{n}\right)^2 \leq 12 \sum_{n=1}^m a_n^2$$

Der gælder endda

$$\sum_{n=1}^m \left(\frac{A_n}{n}\right)^2 \leq C \sum_{n=1}^m a_n^2, \quad C = \frac{64}{9} < 8$$

### Løsning

Vi kan antage, at alle  $a_n \geq 0$ , da  $|A_n| \leq \sum_{p=1}^n |a_p|$ .

For  $n = 1, 2, \dots, m$  har vi

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m \left(\frac{A_n}{n}\right)^2 &= \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^2} \sum_{p,q=1}^n a_p a_q \leq \\ 2 \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^2} \sum_{1 \leq p \leq q \leq n} a_p a_q &= 2 \sum_{q=1}^m a_q \sum_{p=1}^q a_p \sum_{n=q}^m \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

Nu er

$$\sum_{n=q}^m \frac{1}{n^2} \leq \int_{q-\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{q-\frac{1}{2}} \leq \frac{4}{3q}$$

for  $q > 1$ , hvor vi ved anvendelsen af integralkriteriet har benyttet, at  $\frac{1}{t^2}$  er konveks for  $0 > t > \infty$ . Nu fås

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m \left(\frac{A_n}{n}\right)^2 &\leq \frac{8}{3} \sum_{q=1}^m a_q \frac{1}{q} \sum_{p=1}^q a_p \\ &= \frac{8}{3} \sum_{q=1}^m a_q \frac{A_q}{q} \end{aligned}$$

Ved Cauchy's ulighed fås

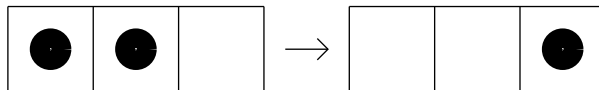
$$\left[ \sum_{n=1}^m \left(\frac{A_n}{n}\right)^2 \right]^2 \leq \left(\frac{8}{3}\right)^2 \sum_{q=1}^m a_q^2 \sum_{q=1}^m \left(\frac{A_q}{q}\right)^2$$

hvoraf det ønskede vises ved division med  $\sum_{n=1}^m \left(\frac{A_n}{n}\right)^2$  (som kan antages  $> 0$ , da resultatet ellers er trivielt).

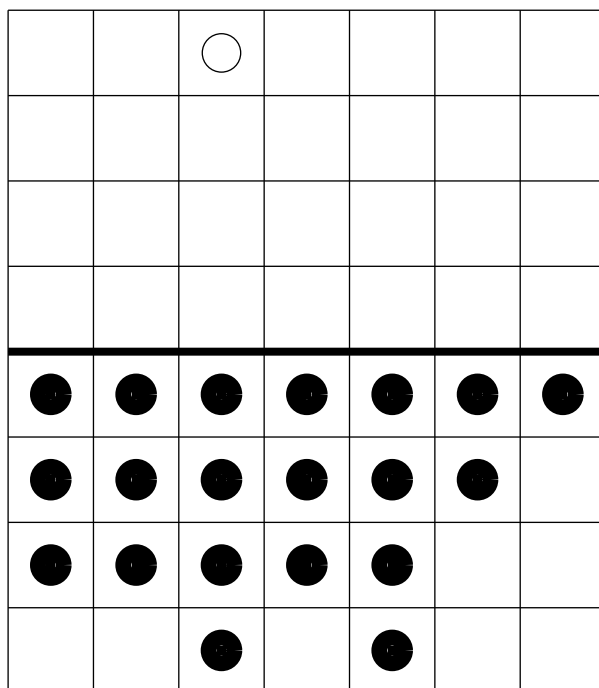
## NYE OPGAVER

### Spionen

Solitaire spilles med pinde, der på figurerne er angivet som sorte pletter. Der kan stå én eller ingen pind i et felt, som på figuren er angivet som et kvadrat. Reglen er, at en pind kan springe til et tomt felt over én anden pind, som derefter fjernes. Man siger, at den er *slået*.



Når man øver sig med pindene, får man let den tanke, at det er sjovt at prøve at ende så langt væk fra udgangspunktet som muligt. På figuren nedenfor er angivet en hær på 20 pinde, som er opstillet så gunstigt, at det er muligt at ende i feltet, der er markeret med en cirkel.



Spørgsmålet er, om dette er det bedste, vi kan opnå. Er det muligt at nå fem skridt ud fra fronten?

### Arealet af en $\diamond$

Bestem arealet af en  $\diamond$ , givet ved formlen:

$$|x|^{\frac{2}{3}} + |y|^{\frac{2}{3}} \leq 1$$

Opgaven generaliseres umiddelbart til

$$\diamond_p = \left\{ (x, y) \mid |x|^{\frac{2}{p}} + |y|^{\frac{2}{p}} \leq 1 \right\}$$

med arealerne  $\pi$  for  $p = 1$  og  $2$  for  $p = 2$ .

### Kompleks algebra

Lad  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  være komplekse tal, så at  $\sum_{i=1}^n \alpha_i^m$  er et helt tal for enhver positiv hel eksponent,  $m$ .

Vis, at polynomiet  $\prod_{i=1}^n (x - \alpha_i)$  har hele koefficienter.