Fra mørsere og muddermaskiner til “Den Mægtige”: *Videnskabernes Selskabs* prisopgaver i matematik 1768–1866

Henrik Kragh Sørensen*
Institut for Videnskabshistorie, Aarhus Universitet
ivhhks@ivh.au.dk

7. februar 2003

> “De foresette og curieuse og vanskelige Spørgsmål at resolvere, og uddeele Belønninger til dem som ere lykkelige i at løse Knuderne.”
>
> *Holberg, citeret fra Lomholt 1942–1973, III, 450.*

Indledning

I 1768 — omtrent et kvart århundrede efter sin grundlæggelse — begyndte *Det kongelige danske videnskabernes Selskab* at udskrive prisopgaver til besvarelse og bedømmelse indenfor fagene historie, fysik og matematik. I 1793 blev *Videnskabernes Selskab* opdelt i klasser, hvorefter prisopgaverne blev et anliggende for hver enkelt klasse, og i slutningen af 1700-tallet udvidedes antallet af prisopgaver med en filosofisk opgave og to privatsponsorerede, praktisk orienterede opgaver. Med denne artikel vil jeg kort beskrive aspekter af formålene, indholdet og virkningen af prisopgaverne indenfor matematik fra de første opgaver i 1768 til den matematiske klasses sammenlægning med den fysiske klasse knap hundrede år senere. Jeg har udvalgt tre prisopgaver stillet i prisopgavernes guldalder i starten af 1800-tallet til at illustrere nogle centrale aspekter af matematikkens udvikling.

I den omtalte periode var opfattelsen og indholdet af matematikken i Danmark noget anderledes end vi er vant til i dag. På universitetet var matematik primært et undervisningsfag for alle studerende på første studieår (til den såkaldte andeneksamen), og forskning spillede en meget tilbagetrukken rolle. Indholdsmæssigt var matematikken mere omfattende end det senere blev tilfældet, og begge disse forhold havde betydning for prisopgaverne i matematik. Matematik fandtes også repræsenteret andre steder i uddannelsessystemet, f.x. i latinskolen og på de militære akademier, og både den åndsudviklende og den mere faktuelle matematiske dannelse var dyder, som med forskellig vægt skulle udvikles hos de studerende — primært gennem kendskab til den euklidiske tradition som udstukket i *Elementerne*. Det er i denne lidt brogede sammenhæng, at prisopgaverne fra *Videnskabernes Selskab* skal passes ind.

Prisopgaverne som institution

Prisopgaverne i *Videnskabernes Selskab* var langt fra en enestående konstruktion — nærmest tværtimod. Mange lærde selskaber i Europa indførte i 1700-tallet forskellige, til dels konkurrerende prisopgaver, således blandt andet i Paris (1714) og Berlin (1744). Formålene med prisopgaverne var dels at promovere selskaberne og deres protektorer og dels at stimulere løsningen af presserende problemer, både praktiske og teoretiske.

Prisopgaverne i *Videnskabernes Selskab* blev indført, efter at Christian VII i 1767 afsatte renterne af 8000 rigsdaler til udsættelse af tre årlige præmier for de bedste besvarelser indenfor historie, fysik og matematik. Formålet var at fremme kontakten med lærde udenfor *Selskabets* egne rækker og derved promovere *Selskabets* aktiviteter nationalt og internationalt. Derfor blev prisopgaverne annonceret i en række udenlandske tidsskrifter. *Selskabets* medlemmer brugte — under sekretærernes overvågning — stor energi i at udtænke prisspørgsmålene og bedømme de indkomne besvarelser, og prisopgaverne opnåede at blive en vigtig del af *Selskabets* virksomhed.

I 1769 — året efter udsættelsen af den første opgave — besluttede *Selskabet* sig så for designet af den guldmedalje, som skulle tildeles vinderne af priskonkurrencerne (se figur 1). Imidlertid faldt bestræbelserne sammen med den turbulente periode under Struensees regering og fald, og man fik derfor ikke præget de første medaljer før et par år senere, hvorfor de første vindere måtte nøjes med

*Forskningen bag denne artikel er udført i efteråret 2002 og finansieret af DVH-projektet: Dansk VidenskabsHistorie. DVH-projektet har basis ved Institut for Videnskabshistorie, Aarhus Universitet og skal — på grundlag af en bevilling fra Carlsbergfondet — blandt andet producere et firebindsværk om (natur)videnskaberne i Danmark fra vikingetiden til 1970. For yderligere information, se www.ivh.au.dk/dvh.
Forfatteren ønsker at takke Anita Kildebæk Nielsen og Kirsti Andersen for gode ideer og kommentarer under arbejdet med denne artikel. En tak skal også rettes til personalet ved *Det kongelige danske videnskabernes Selskab* for deres hjælpsomhed og åbne modtagelse under mine besøg i arkivet.

Figur 1: Prismedaljen fra *Videnskabernes Selskab* 1769. Reproduceret fra (Lomholt 1942–1973, I, 67). Portrætsiden viser den laurbærkronede Christian VII, mens reversen viser Den hidkaldte Sandhed i form af en kvinde med en laurbærkrans og en tubus.

medaljens værdi i rede penge.

Arbejdsgangen bag udskrivelsen af prisopgaverne var, at sekretæren indkaldte forslag, som så diskuteredes før en beslutning blev taget. Således kan de stillede prisopgaver i matematik benyttes som en historisk indfaldsvinkel til at undersøge, hvad der rørte sig og blev efterspurgt i det københavnske matematikmiljø.

Prisopgaverne blev — efter en turbulent start — udstedt rimelig regelmæssigt. I starten blev der nogle år udskrevet flere opgaver, hvorfor der kompenseredes ved at undlade at udskrive opgaver andre år. Efter 1800 blev prisopgaveaktiviteten mere struktureret, og de eneste år uden en matematisk prisopgave var katastrofeåret 1814, 1824 og endelig 1838, hvor der slet ingen prisopgaver blev stillet. Der indkom besvarelser både fra ind- og udland, og værdige besvarelser blev belønnet med guldmedaljen. Hvis der ingen besvarelser indkom, som var værdige til belønning, benyttede *Selskabet* af og til at genudskrive opgaven. I perioden 1768 til 1866 uddeltes ialt 20 guldmedaljer for matematiske opgaver, heraf langt hovedparten i det 18. århundrede. Interessen for at besvare prisspørgsmålene var — især blandt det internationale publikum — kraftigt aftagende i det 19. århundrede i takt med, at nye medier som f.x. de første egentlige fagtidsskrifter øgede mulighederne for hurtig kommunikation og publikation af ny viden. Men den aftagende interesse i den matematiske klasse kan også hænge sammen med det skift i opgavernes indhold, som kan spores.

Et overblik over prisopgaverne i matematik

Prisopgaverne i matematik omfattede en mangfoldighed af emner, både astronomiske, ‘rene’, ‘anvendte’, ‘praktiske’ og filosofiske. Imidlertid var skellet mellem ren, anvendt (i den polytekniske forstand som matematiseret fysik) og praktisk matematik ikke udtalt i *Videnskabernes Selskab*, så det beror på en rekonstruktion at skelne mellem disse kategorier. Til den praktiske kategori henregner jeg f.x. opgaverne om “den bedste indretning af mørsere [mortere]” (1772) eller “muddermaskinen til oprensning af ferske søer” (1773), men også andre samfundstjenlige opgaver som spørgsmålet “om kanoners mest hensigtsmæssige kalibre” (1785). Disse opgavetyper var som nævnt ikke ualmindelige opgaver for et kongeligt akademi, men i *Videnskabernes Selskab* forsvandt de omkring år 1800 — til dels i forbindelse med oprettelsen af de privat-indstiftede priser. En vis reorientering kan eksemplificeres med opgaven “om den bane, som et cylindrisk legeme såsom en congrevisk ild-raket, beskriver” (1809), som er noget mere ‘rent matematisk’ end de ovenfor nævnte mere ‘praktiske’ opgaver, selvom en forventet samfundsnytte også her var tydelig.

En anden stor del af de stillede opgaver omhandlede astronomiske emner, som stadig blev betragtet som en matematisk disciplin. De astronomiske opgaver var tilbagevendende, selvom også de antog en mindre synlig plads, efterhånden som den ‘rene’ matematik trådte tydeligere i karakter. Foruden de astronomiske opgaver udstedtes spørgsmål indenfor et felt, som vi kan betegne som ‘matematisk fysik’. Den gruppe af opgaver, som jeg især vil fokusere på i denne sammenhæng, er de ‘rene’ matematikopgaver, og jeg har udvalgt tre prisopgaver fra det 19. århundredes andet årti som illustration af to centrale aspekter, nemlig “hvad var et spørgsmål?” og “hvilke internationale forbindelser og inspirationskilder havde matematikerne i København?”.

Hvad var et spørgsmål? Og hvad udgjorde et svar?

Når man beskæftiger sig med en historisk periode er det blandt meget andet vigtigt at undersøge og forstå, hvad der udgjorde og karakteriserede ‘problemer’ og ‘spørgsmål’ for datidens matematikere. Et interessant indblik i dette kan man få ved at studere prisopgaven for 1812. Til denne opgave, som var blevet foreslået af major J. H. Steffens (1772–1815), efterspurgtes en “summationsformel for følgende række

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{9\cdot 11}+\frac{1}{13\cdot 15}+\frac{1}{17\cdot 19}+\text{etc.}\ldots$$

eller med et almindeligt udtryk

$$\frac{a}{b(b+d)}+\frac{1}{(b+2d)(b+3d)} + \frac{a}{(b+4d)(b+5d)}+\text{etc.}\ldots\text{”} \qquad (1)$$

eller i det mindste en undersøgelse af, hvorvidt “der kunne gøres antagender”. En simpel manipulation på (1) viser, at den er ækvivalent med

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a}{(b+2nd)(b+(2n+1)d)} = \frac{a}{d^2} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{\frac{b}{d}+s} = \frac{a}{d^2}\beta\left(\frac{b}{d}\right),$$

så man havde med andre ord efterspugt en summationsformel for det, der senere blev kendt som β-funktionen, som man i et stykke tid havde betragtet som et interessant objekt.

På denne prisopgave indløb et rekordstort antal besvarelser, nemlig 13, og der blev uddelt en guldmedalje til den retsvidenskabelige professor H. E. S. von Schrader (1779–1860) fra Tübingen. Schrader blev belønnet fordi hans "metoders nyhed og udførelsens skarpsindighed fortjente fortrinet" frem for de andre indkomne besvarelser. I 1818 blev hans besvarelse trykt i Weimar, og den opnåede en vis cirkulation i det internationale miljø.

Og hvad var det så, Schrader leverede, der var både nyt og skarpsindigt? Schrader havde — igennem længere manipulationer, mange tilfælde og 54 sider tætbeskrevet latin — givet et i hvert fald delvist svar på prisspørgsmålet i form af en formel bestående af inverse trigonometriske og logaritmiske funktioner, som under visse betingelser udtrykte β-funktionen. Schraders integration var baseret på Eulers undersøgelser af integraler af formen

$$\int \frac{x^{b-1}\,dx}{1-x^{2d}}.$$

Men endvidere brugte Schrader — ligesom de andre besvarere — også en del plads og kræfter på at udregne numeriske værdier, hvilket altså udgjorde en del af indholdet af en 'besvarelse'. Dette antyder en vigtig ting omkring problemer og svar i begyndelsen af 1800-tallet, som også kan ses ved et af periodens andre varme emner, nemlig elliptiske integraler: Matematisk problemløsning handlede (endnu) ikke om at bevise generelle sætninger; man behandlede derimod ofte partikulære objekter, som man søgte at få 'kendskab' til — og med til kendskabet hørte reduktion til i forvejen kendte objekter, alternative repræsentationer og numeriske beregninger.

International inspiration: Forbindelsen til Gauss

Prisopgaven for 1817 viser både lighedspunkter og store forskelle fra opgaven for 1812. I 1817 efterspurgte *Videnskabernes Selskab* bestemmelsen af "den fælles grænse, hvorimod de to følger

$$a' = \frac{ma+nb}{m+n}, \quad b' = \sqrt[m+n]{a^m b^n}; \qquad a'', b''; \qquad a''', b''' \qquad \text{o.s.fr.} \tag{2}$$

nærmer sig, når de fortsættes i det uendelige." Igen søgte man altså en grænse i form af et lukket udtryk for et analytisk objekt givet i form af en uendelig proces. I modsætning til 1812-opgaven indkom der kun en enkelt besvarelse, som endda ifølge protokollen "fandtes aldeles utilfredsstillende" (når man ser besvarelsen, som stadig findes i arkivet, forstår man godt vurderingen, for besvarelsen består egentlig blot af nogle enkle numeriske eksempler). Det er dermed ikke selve besvarelsen, som er interessant i denne forbindelse, men derimod baggrunden for, at *Videnskabernes Selskab* udskrev den omtalte prisopgave.

Aritmetisk-geometriske middelværdier — svarende til $(m,n)=(1,1)$ i (2) — var et område af matematikken, som C. F. Gauss (1777–1855) opdyrkede i begyndelsen af 1800-tallet, og som ledte Gauss ind på studiet af de nævnte elliptiske integraler. Bevidstheden om Gauss' interesse var — på forskellig og forunderlig vis — nået til København. I et brev til Gauss berettede den danske astronom og geodæt H. C. Schumacher (1780–1850), som stod i nær brevveksling med Gauss således, hvordan den ene af matematik-professorerne i København, C. F. Degen (1766–1825), havde fortalt ham om aritmetisk-geometriske middeltal, som var forskellige fra Gauss'. Gauss' reaktion var prompte og skarp; han mindede Schumacher om, at denne havde fået lov at se Gauss' undersøgelser og resultater indenfor netop dette emne. Endvidere påpegede Gauss, at Degens middelværdier, som Schumacher altså troede var nye, netop var præcist sammenfaldende med Gauss' egne. Dermed tog Gauss luften af Degens (og Schumachers) undersøgelser om dette emne, og Gauss undlod heller ikke at nævne, hvor langt længere han selv var nået. Derefter havde ingen af danskerne lyst (eller mod) til at indgå i en kappestrid med "Den Mægtige", som Gauss blev benævnt i København. I stedet bad Schumacher Gauss om at gøre sine undersøgelser tilgængelige, og det er i denne sammenhæng, prisopgaven kommer ind i billedet. Ikke kun i dette tilfælde, men også i forbindelse med prisopgaven for 1816 om "fremstilling af interpolationsteorien" var der en åbenlys kandidat i sigte, nemlig Gauss. Dermed kom prisopgaverne til at tjene et nyt formål, nemlig at lempe resultater op af Gauss' dybe skuffer; i ingen af tilfældene lykkedes det dog. Kontakten bevirkede dog, at viden om aritmetisk-geometriske middeltal og elliptiske funktioner bredte sig til København, hvorfra den senere nåede den norske matematiker Niels Henrik Abel (1802–1829), som vidste at gøre god brug af den.

I modsætning til de fejlslagne forsøg i 1816 og 1817 på at fravriste Gauss resultater af almen interesse, havde *Videnskabernes Selskab* mere held med sig i forbindelse med prisen for 1820 — men da havde det også fået hjælp udefra. I 1816 udvekslede Gauss og Schumacher ideer til prisopgaver, og Gauss havde stillet forslaget "generelt at projicere (afbilde) en given flade på en (given) anden [flade], således at billedet er ligedannet med originalen i de mindste dele”. Dette emne var, ifølge Gauss, bl.a. interessant i geodætiske sammenhænge hvis den ene flade var en kugle, men Gauss ønskede netop spørgsmålet behandlet generelt. Gauss’ forslag blev stillet som *Videnskabernes Selskabs* prisopgave i matematik for 1820, samme år som Gauss var blevet gjort til udenlandsk medlem. Da der ingen besvarelser var indløbet ved fristens udløb, forlængedes fristen med yderligere et år, og Schumacher lagde pres på Gauss for at sikre i det mindste een besvarelse af opgaven. Schumachers egen prestige stod på spil, og Gauss honorerede opfordringen, indsendte sin besvarelse og blev belønnet med en guldmedalje (som han senere fik ombyttet i kontanter, hvilket han — med henvisning til konens sygdom og de deraf affødte ekstra omkostninger — åbenbart manglede mere end en medalje).

I prisopgaven undersøgte Gauss betingelserne for konforme afbildninger, som han senere udviklede og udvidede i sin *Disquisitiones generales circa superficies curves*. I prisbesvarelsen lod Gauss (x,y,z) betegne koordinaterne på et punkt på den ene givne flade. Han antog så, at disse kunne udtrykkes som funktioner af to variable (t,u); $(x,y,z) = (x(t,u), y(t,u), z(t,u))$. For den anden givne flade indførte han i analogi hermed $(X,Y,Z) = (X(T,U), Y(T,U), Z(T,U))$. Dernæst hævdede Gauss, at det at afbilde den ene givne flade på den anden givne flade betød at udtrykke (T,U) som en funktion af (t,u), og gennem en “analytisk” undersøgelse fandt han ud af hvad det vil sige, at billedet er “ligedannet i de mindste dele” med originalen. Han fandt som sit hovedresultat deraf, at med betegnelserne

$$\begin{aligned} dx &= a\,dt + a'\,du, & dX &= A\,dT + A'\,dU,\\ dy &= b\,dt + b'\,du, & dY &= B\,dT + B'\,dU,\\ dz &= c\,dt + c'\,du \ \text{ og } & dZ &= C\,dT + C'\,dU \end{aligned}$$

skulle

$$\frac{aa+bb+cc}{AA+BB+CC} = \frac{aa'+bb'+cc'}{AA'+BB'+CC'} = \frac{a'a'+b'b'+c'c'}{A'A'+B'B'+C'C'},$$

hvilket var Gauss’ måde at udtrykke, at fundamentalformerne var proportionale. Hvis denne betingelse var opfyldt ville, hævdede Gauss, samhørende vinkler være ens og længder proportionale på de to flader. Derefter bestod resten af afhandlingen af undersøgelser af forskellige hypoteser omkring fladerne. Selvom opgavebesvarelsen fra 1822 (som blev publiceret 1825 i Schumachers *Astronomische Abhandlungen*) således indeholdt Gauss’ første fundamentalform og betingelserne derpå, er præsentationen ikke nær så generel, som Gauss skulle give den i sit differential-geometriske mesterværk *Disquisitiones generales*.

Konklusioner

Gennem udskrivelsen af årlige prisopgaver både påvirkede og afspejlede *Videnskabernes Selskab* matematikkens stilling og udvikling, som den blev opfattet fra periferien af det europæiske matematiske miljø, som siden slutningen af 1700-tallet primært havde centrum i Frankrig. Generelt afspejlede opgaverne matematikkens mange forskellige roller som praktisk og anvendelig videnskab, men også de mere ‘rene’ opgaver kan fortælle mange historier.

For det første har diskussionen omkring prisopgaverne for 1812 og 1817 antydet, hvordan opfattelserne af ‘et spørgsmål’ og ‘et svar’ afspejlede den opfattelse af matematik som værende baseret på manipulationer af formler, som var fremherskende omkring 1800. Matematik — som i denne sammenhæng betyder analyse, da der næsten ingen prisopgaver blev stillet i geometri — handlede om funktioner, funktioner var givet ved opskrifter (af en eller anden form), og viden om funktioner bestod i at manipulere dem for at nå frem til kendte og trygge objekter, eventuelt ved numeriske beregninger.

For det andet har omtalen af Gauss’ rolle i forbindelse med prisopgaverne afdækket nogle af de indre mekanismer og kommunikationer, som formede de danske matematikeres viden om disciplinens internationale udvikling. De danske matematikere prioriterede ikke internationalt orienteret forskning højt. Men især gennem Schumacher havde de en indgangsvinkel til den store Gauss i Göttingen, og det benyttede man sig af. I tredie forsøg lykkedes det endelig at interessere Gauss i de danske prisopgaver, for hvilke han blev tilkendt en guldmedalje, der egentlig var til ligeså stor ære for *Videnskabernes Selskab* som for Gauss.

Som det endelig også fremgår af prisopgaverne, så var matematik i perioden 1760–1860 en mere blandet størrelse, end vi er blevet vant til. Først i de efterfølgende tiår gennemgik den matematiske videnskab en egentlig professionalisering, hvor det blandt andet for alvor blev vigtigt for selvforståelsen at adskille den ‘rene’ matematik fra forskellige grader af ‘anvendt’ eller ‘praktisk’ matematik. Prisopgaverne afspejler denne gradvise udvikling, som samtidig hænger sammen med, hvad der kan betragtes som et godt svar på et matematisk problem. Den formel- og regningstunge matematik, som bestod af direkte manipulationer af udtryk, og som også er illustreret i de valgte eksempler, gav langsomt plads for en mere bevis- og begrebsbaseret matematik, hvor højere abstraktioner og generalitet blev uomgængelige krav.

Litteratur

Abel, N. H.: *Breve*$_2$, Breve om Abel, *i* E. Holst, C. Størmer og L. Sylow (red.), *Festskrift ved Hundredeaarsjubilæet for Niels Henrik Abels Fødsel*, 1902, Jacob Dybwad, Kristiania.

Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Naturvidenskabelige og Mathematiske Afhandlinger. Förste Deel.: 1824, Hartv. Frid. Popps Bogtrykkerie, Kiöbenhavn.

Gauss, C. F. og Schumacher, H. C.: 1860, *Briefwechsel zwischen C. F. Gauss und H. C. Schumacher*, Gustav Esch, Altona. 5 bind.

Gauss, C. F.: 1825, Allgemeine Auflösung der Aufgabe die Theile einer gegebenen Fläche auf einer andern gegebenen Fläche so abzubilden dass die Abbildung dem abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird, *Carl Friedrich Gauss Werke*, bind 4, Königliche Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen, s. 189–216. Først offentliggjort: *Astronomische Abhandlungen*, Altona 1825.

Gauss, C. F.: 1828, Disquisitiones generales circa superficies curvas, *Carl Friedrich Gauss Werke*, bind 4, Königliche Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen, s. 217–258. Præsenteret i *Königliche Gesellschaft der Wissenschaften*, Göttingen den 6. oktober 1827. Først offentliggjort i *Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentionres*, bind VI, 1828.

Lomholt, A.: 1942–1973, *Det kongelige danske videnskabernes Selskab 1742–1942. Samlinger til Selskabets historie*, Ejnar Munksgaard, København. 5 bind.

Molbech, C.: 1843, *Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Historie i dets første Aarhundrede 1742–1842. Udarbejdet efter Kilderne*, Jens Hostrup Schultz, Kiøbenhavn.

Pedersen, O.: 1992, *Lovers of Learning. A History of the Royal Danish Academy of Sciences and Letters 1742–1992*, Munksgaard, Copenhagen.